Санкт-Петербургский государственный университет

МОСТОВСКИЙ Петр Алексеевич

Выпускная квалификационная работа

«Когомологии Хохшильда некоторых алгебр диэдрального типа»

Уровень образования: специалитет
Направление: 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»
Основная образовательная программа: СМ.5007.2014 «Фундаментальные математика и механика»

Научный руководитель: профессор, мат.-мех. СПбГУ, д.ф.-м.н. Генералов Александр Иванович

Рецензент: доцент, Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД, к.ф.-м.н. Косовская Надежда Юрьевна

2019

Saint Petersburg State University

Petr MOSTOVSKII

Qualification Research Paper

«Hochshild cohomology for certain algebras of dihedral type»

Education level: Specialist degree
Specialty: 01.05.01 «Fundamental Mathematics and Mechanics»
Study program: CM.5007.2014 «Fundamental Mathematics and Mechanics»

Scientific supervisor: Prof., Dept. of Math. and Mech. SPbSU, Doctor of Math. and Phys. Aleksandr Ivanovich Generalov

Reviewer: Assoc. Prof., Higher School of Technology and Energy SPbSUITD, Ph.D. Kosovskaia Nadezhda Yurievna

2019

Содержание

1 Введение

Мы продолжаем работу, начатую в [1], по вычислению алгебры когомологий Хохшильда некоторых алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ в случае характеристики основного (алгебраически замкнутого) поля, отличной от 2.

Алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков с ручным типом представления (см. [2]).

В работе [1] была построена бимодульная резольвента рассматриваемых алгебр, а также вычислены размерности групп когомологий. Используя технику, развитую в работе [3] и последующих, мы вычисляем мультипликативную структуру алгебры когомологий Хохшильда. Ранее подобное описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ было получено в случае характеристики основного поля, равной 2 ([3]).

Наша работа структурирована следующим образом: в разделе 2 приводится формулировка основного результата работы — теорема 1, в которой утверждается изоморфность алгебры когомологий Хохшильда некоторой факторалгебре алгебры (некоммутирующих) многочленов над основным полем. В разделе 3 приводится описание мультипликативных образующих и соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$. Наконец, в разделе 4 доказывается теорема 1.

2 Формулировка основного результата

Пусть K — алгебраически замкнутое поле, $p := \mathrm{char} K$, $\Lambda := R \otimes_K R^{op}$ — её обертывающая алгебра. Алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ алгебры R определяется как $\mathrm{HH}^*(R) := \bigoplus\limits_{m \geq 0} \mathrm{HH}^m(R)$, где

$$\mathrm{HH}^m(R) := \mathrm{Ext}^m_\Lambda(R, R)$$

— n-я группа когомологий Хохшильда. На кольце $\mathrm{HH}^*(R)$ вводится произведение Йонеды, причем алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ оказывается градуированно коммутативной.

Алгебры $R := R_{n_1,n_2,n_3}$, где $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, серии $D(3\mathcal{K})$ описываются с помощью следующего колчана $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ с соотношениями:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, shift left, leftarrow, "a_{12}"] \arrow[rr, shift right, "a_{21}"'] \arrow[dr, shift right, "a_{31}"'] & & 2 \arrow[dl, shift right, "a_{23}"'] \\
& 3 \arrow[ul, shift right, "a_{13}"'] \arrow[ur, shift right, "a_{23}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
0 = a_{12}a_{23} = a_{23}a_{31} = a_{31}a_{12} = a_{23}a_{32} = a_{32}a_{21} = a_{21}a_{13}, \qquad (2.1)\\
(a_{12}a_{21})^{n_3} = (a_{13}a_{31})^{n_2}, \qquad (2.2)\\
(a_{23}a_{32})^{n_1} = (a_{21}a_{12})^{n_3}, \qquad (2.3)\\
(a_{31}a_{13})^{n_2} = (a_{32}a_{23})^{n_1}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

В дальнейшем все индексы вершин и путей колчана считаются элементами кольца $\mathbb{Z}_3$.

Рассмотрим алгебру

$$K\langle\mathcal{X}\rangle := K\langle c_{12}, c_{23}, c_{31}, w, z_1, x_{12}, x_{23}, x_{31}, u_1, u_2, e, \hat{e}_1, \hat{e}_2\rangle,$$

и введем на ней градуировку так, что

$$\deg c_{i,i+1} = 0, i = 1, 2, 3, \qquad (2.5)$$

$$\deg w = \deg z_1 = 1, \qquad (2.6)$$

$$\deg x_{i,i+1} = \deg u_j = 2, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \qquad (2.7)$$

$$\deg e = 4, \qquad (2.8)$$

$$\deg \hat{e}_i = 6, i = 1, 2. \qquad (2.9)$$

Построим алгебру $\mathcal{A} := K\langle\mathcal{X}\rangle/I$, где идеал I порожден следующими элементами:

– степени 0:

$$c_{12}^{n_3+1}, c_{23}^{n_1+1}, c_{31}^{n_2+1}, \qquad (2.10)$$

$$c_{12}c_{23}, c_{23}c_{31}, c_{31}c_{12}; \qquad (2.11)$$

– степени 1:

$$c_{12}^{n_3}w, c_{23}^{n_1}w, c_{31}^{n_2}w, \qquad (2.12)$$

$$c_{12}z_1, c_{23}z_1, c_{31}z_1; \qquad (2.13)$$

– степени 2:

$$c_{i,i+1}u_j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \qquad (2.14)$$

$$c_{12}^{n_3-1}x_{12}, c_{23}^{n_1-1}x_{23}, c_{31}^{n_2-1}x_{31}, \qquad (2.15)$$

$$c_{i,i+1}x_{j,j+1}, i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \qquad (2.16)$$

$$w^2 - (3n_1n_2n_3 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_1)wz_1, \qquad (2.17)$$

$$z_1^2; \qquad (2.18)$$

– степени 3:

$$z_1x_{12}, z_1x_{23}, z_1x_{31}, \tag{2.19}$$

$$wu_1, wu_2; \tag{2.20}$$

– степени 4:

$$x_{12}^2 + c_{12}e, x_{23}^2 + c_{23}e, x_{31}^2 + c_{31}e, \tag{2.21}$$

$$x_{12}x_{23}, x_{23}x_{31}, x_{31}x_{12}, \tag{2.22}$$

$$c_{12}^{n_3}e, c_{23}^{n_1}e, c_{31}^{n_2}e, \tag{2.23}$$

$$u_kx_{i,i+1}, i = 1, 2, 3, k = 1, 2, \tag{2.24}$$

$$u_iu_j, i = 1, 2, j = 1, 2; \tag{2.25}$$

– степени 6:

$$c_{12}\hat{e}_i = c_{23}\hat{e}_i = c_{31}\hat{e}_i, i = 1, 2; \tag{2.26}$$

$$eu_1, eu_2; \tag{2.27}$$

– степени 8:

$$\hat{e}_ix_{j,j+1}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3; \tag{2.28}$$

$$\hat{e}_2u_1, \hat{e}_1u_2; \tag{2.29}$$

– степени 12:

$$\hat{e}_1\hat{e}_2, \tag{2.30}$$

а также элементами вида

$$uv - (-1)^{\deg u \deg v}vu, \quad \forall v, u \in \mathcal{X}. \tag{2.31}$$

Построим также алгебру $\mathcal{A}_1 := K\big\langle \mathcal{X}_1 \big\rangle / I_1$, где

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \setminus \{w\} \cup \{w_{23}, x_1, x_3, \zeta, \widehat{w}_{23}, \widehat{x}_1, \widehat{x}_3, \widehat{u}_1, \widehat{u}_2\},$$

с градуировкой, продолжающей градуировку алгебры $K\big\langle \mathcal{X} \big\rangle$ так, что

$$\deg w_{23} = \deg x_1 = \deg x_3 = 1, \tag{2.32}$$

$$\deg \zeta = 2, \tag{2.33}$$

$$\deg \widehat{w}_{23} = \deg \widehat{x}_1 = \deg \widehat{x}_3 = 3, \tag{2.34}$$

$$\deg \widehat{u}_1 = \deg \widehat{u}_2 = 7, \tag{2.35}$$

а идеал I_1 порожден элементами (2.10) - (2.30), кроме содержащих w, и кроме $c_{23}^{n_1}e$, а также элементами

– степени 1:

$$c_{12}^{n_3-1}x_1, c_{23}x_1, c_{31}x_1, \tag{2.36}$$

$$c_{12}x_3, c_{23}x_3, c_{31}^{n_2-1}x_3, \tag{2.37}$$

$$c_{12}w_{23}, c_{23}^{n_1}w_{23}, c_{31}w_{23}, \tag{2.38}$$

– степени 2:

$$x_1x_3, x_1w_{23}, x_3w_{23}, \tag{2.39}$$

$$x_1^2, x_3^2, w_{23}^2, w_{23}z_1, \tag{2.40}$$

$$w_{23}^2, w_{23}z_1, c_{i,i+1}\zeta, i = 1, 2, 3, \tag{2.41}$$

– степени 3:

$$w_{23}x_{12}, w_{23}x_{31}, \tag{2.42}$$

$$w_{23}x_{23} - c_{23}\widehat{w}_{23}, \tag{2.43}$$

$$x_{12}x_1 + c_{12}\widehat{x}_1, x_{31}x_3 + c_{31}\widehat{x}_3, \tag{2.44}$$

$$x_{23}x_1, x_{31}x_1, x_{12}x_3, x_{23}x_3, \tag{2.45}$$

$$c_{12}^{n_3-1}\widehat{x}_1, c_{23}\widehat{x}_1, c_{31}\widehat{x}_1, \tag{2.46}$$

$$c_{12}\widehat{x}_3, c_{23}\widehat{x}_3, c_{31}^{n_2-1}\widehat{x}_3, \tag{2.47}$$

$$w_{23}u_j, x_iu_j, i = 1, 3, j = 1, 2, \tag{2.48}$$

$$x_i\zeta, w_{23}\zeta, z_1\zeta, i = 1, 3 \tag{2.49}$$

– степени 4:

$$c_{23}^{n_1+1}e, \tag{2.50}$$

$$x_i\widehat{x}_j, i = 1, 3, j = 1, 3, \tag{2.51}$$

$$x_1\widehat{w}_{23}, x_2\widehat{w}_{23}, w_{23}\widehat{w}_{23}, z_1\widehat{w}_{23}, \tag{2.52}$$

– степени 5:

$$x_{12}\widehat{x}_1 - c_{12}x_1e, \tag{2.53}$$

$$x_{23}\widehat{x}_1, x_{31}\widehat{x}_1, \tag{2.54}$$

$$x_{31}\widehat{x}_3 - c_{31}x_3e, \tag{2.55}$$

$$x_{12}\widehat{x}_1, x_{23}\widehat{x}_1, \tag{2.56}$$

$$u_i\widehat{x}_j, u_i\widehat{u}_i, u_i\widehat{u}_{i+1}, i = 1, 2, j = 1, 3, \tag{2.57}$$

$$x_{12}\widehat{w}_{23}, = x_{31}\widehat{w}_{23}, \tag{2.58}$$

$$x_{23}\widehat{w}_{23} - c_{23}w_{23}e, \tag{2.59}$$

$$\zeta\widehat{x}_i, \zeta\widehat{w}_{23}, i = 1, 3, \tag{2.60}$$

– степени 6:

$$\widehat{x}_i\widehat{w}_{23}, \widehat{w}_{23}^2, i = 1, 3, \tag{2.61}$$

– степени 7:

$$c_{i,i+1}\widehat{u}_1, c_{i,i+1}\widehat{u}_2, i = 1, 2, 3, \tag{2.62}$$

– степени 8:

$$x_i\widehat{u}_j, i = 1, 3, j = 1, 2, \tag{2.63}$$

$$w_{23}\widehat{u}_1 - z_1\widehat{u}_1, w_{23}\widehat{u}_2 - z_1\widehat{u}_2, \tag{2.64}$$

– степени 9:

$$x_{i,i+1}\widehat{u}_j, \zeta\widehat{u}_j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \tag{2.65}$$

$$u_i\widehat{u}_j, i = 1, 2, j = 1, 2, \tag{2.66}$$

– степени 10:

$$\widehat{x}_i\widehat{u}_j, \widehat{w}_{23}\widehat{u}_j, i = 1, 3, j = 1, 2, \tag{2.67}$$

– степени 14:

$$\widehat{u}_i\widehat{u}_j, i = 1, 2, j = 1, 2, \tag{2.68}$$

и элементами вида

$$uv - (-1)^{\deg u \deg v} vu, \quad \forall v, u \in \mathcal{X}_1. \tag{2.69}$$

Основной результат этой работы — это следующее описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

Теорема 1. *a. Пусть* $p = \mathrm{char} K \neq 2$, $p \nmid n_1n_2n_3$. *Тогда алгебра* $\mathrm{HH}^*(R)$ *изоморфна алгебре* $\mathcal{A}$.

b. Пусть p *делит* n_1 *и не делит* n_2n_3. *Тогда алгебра* $\mathrm{HH}^*(R)$ *изоморфна алгебре* $\mathcal{A}_1$.

3 Мультипликативные образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

В работе [1] была вычислена аддитивная структура алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$. Напомним вкратце результаты этой работы. Введем обозначения $N := n_1 + n_2 + n_3$, а также матрицы

$$C := \begin{pmatrix} n_3 & 0 & -n_2 \\ -n_3 & n_1 & 0 \\ 0 & -n_1 & n_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$C_1 := \begin{pmatrix} n_3 & 0 & n_2 \\ n_3 & n_1 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Тогда справделива

Теорема 2. *Пусть $p \neq 2$. Тогда размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$ описываются следующим образом:*

$$\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = N + 1, \tag{3.3}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = N + 1 - \mathrm{rk}\, C, \tag{3.4}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = N + 2 - \mathrm{rk}\, C, \tag{3.5}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = N + 2 - \mathrm{rk}\, C_1, \tag{3.6}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = N + 1 - \mathrm{rk}\, C_1, \tag{3.7}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 0, 4, 5 \pmod 6, \\ 2, & \text{если } n \equiv 1, 3 \pmod 6, \\ 4, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6. \end{cases} \tag{3.8}$$

В [1] дано описание базисов пространств $\mathrm{HH}^i(R)$, $i = \overline{1, 4}$, которым мы будем пользоваться, отсылая читателя к этой работе.

Напомним интерпретацию произведения Йонеды в $\mathrm{HH}^*(R)$. Пусть $Q_\bullet \longrightarrow R$ – минимальная проективная резольвента алгебры R как Λ–модуля. Тогда $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(R, R)$ вычисляется как когомологии комплекса $(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R), \Delta)$, где Δ индуцируется дифференциалом d_Q резольвенты. Произвольный коцикл $f : Q_n \longrightarrow R$ можно продолжить до морфизма комплексов $\{\varphi_i : Q_{n+i} \longrightarrow Q_i\}_{i \geq 0}$. Гомоморфизм φ_i назовем i-той трансляцией коцикла f и будем обозначать $T^i(f)$. Тогда для коциклов $f \in \ker \Delta_n$ и $g \in \ker \Delta_m$ имеем $\mathrm{cl}\, g \cdot \mathrm{cl}\, f = \mu T^0(g) T^m(f)$, где μ – пополняющее отображение резольвенты. Более подробно, см., например, [3].

Резольвента $Q_\bullet \longrightarrow R$ была построена в [1]. Через $P_{ij} := \Lambda(e_i \otimes e_j)$ обозначим главные неразложимые Λ-модули. Модули Q_n суть прямые суммы некоторых P_{ij}. Имеется изоморфизм $\mathrm{Hom}(P_{ij}, R) \simeq e_iRe_j$ как K-линейных пространств, и мы сопопоставляем $f : Q_n \longrightarrow R$ набору значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех P_{ij}, которые входят в разложение Q_n.

Введем также, следуя [1], следующие обозначения: $\alpha_i := a_{i,i+1}a_{i+1,i}$, и $\beta_i := a_{i,i-1}a_{i-1,i}$, где $i \in \mathbb{Z}_3$. Нам также потребуется вспомогательный гомоморфизм $\phi : R \longrightarrow R$, определенный в [1]. Напомним, что φ определяется как $\varphi(a_{ij}) := a_{ji}$, продолжается до Λ-гомоморфизма как $\varphi(x \otimes y) := \varphi(y) \otimes \varphi(x)$, и очевидным образом распространяется на матрицы с элементами из Λ.

Будем обозначать матрицу, состоящую из нулей и имеющую n строк и m столбцов, как O_{nm}. Для упрощения обозначений мы будем иногда опускать индексы n, m, когда размеры матрицы O_{nm} могут быть легко получены из контекста. Через O_m будем обозначать матрицу $O_{1,m}$ (то есть “вектор-строку”).

3.1 Случай $p \nmid n_1n_2n_3$

Сделав эти предварительные замечания, рассмотрим случай, когда характеристика p поля K не делит ни одно из n_1, n_2, n_3. В этом случае $\mathrm{rk}\, C = 2$, $\mathrm{rk}\, C_1 = 3$.

Рассмотрим следующие элементы алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0:

$$c_{12} := (\alpha_1, \beta_2, 0); \tag{3.9}$$
$$c_{23} := (0, \alpha_2, \beta_3); \tag{3.10}$$
$$c_{31} := (\beta_1, 0, \alpha_3). \tag{3.11}$$

– степени 1:

$$w := (n_1n_2a_{12}, n_2n_3a_{23}, n_3n_1a_{31}, O_3); \tag{3.12}$$
$$z_1 := (a_{12}, O_2, -a_{21}, O_2). \tag{3.13}$$

– степени 2:

$$x_{12} := (\alpha_1, -\beta_2, O_7); \tag{3.14}$$
$$x_{23} := (0, \alpha_2, -\beta_3, O_6); \tag{3.15}$$
$$x_{31} := (-\beta_1, 0, \alpha_3, O_6); \tag{3.16}$$
$$u_1 := (O_3, \alpha_1^{n_3-1}a_{12}, \alpha_2^{n_1-1}a_{23}, \alpha_3^{n_2-1}a_{31}, O_3); \tag{3.17}$$

$$u_2 := (O_6, a_{12}\alpha_1^{n_3-1}, a_{23}\alpha_2^{n_1-1}, a_{31}\alpha_3^{n_2-1}). \tag{3.18}$$

– степени 4:

$$e := (e_1, e_2, e_3, O_{12}). \tag{3.19}$$

– степени 6:

$$\hat{e}_1 := (O_{15}, e_1, e_2, e_3, O_3); \tag{3.20}$$

$$\hat{e}_2 := (O_{18}, e_1, e_2, e_3). \tag{3.21}$$

Обозначим $\mathcal{Y} := \{c_{12}, c_{23}, c_{31}, w, z_1, x_{12}, x_{23}, x_{31}, u_1, u_2, e, \hat{e}_1, \hat{e}_2\}$.

Предложение 1. *Пусть $p \nmid n_1n_2n_3$. Тогда множество $\mathcal{Y}_0 := \{1\} \cup \mathcal{Y}$ порождает алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$ как K-алгебру.*

Для доказательства предложения нам потребуются трансляции элементов из $\mathcal{Y}$. Введем предварительно некоторые матричные обозначения:

$$E := \mathrm{diag}(e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_3 \otimes e_3), \tag{3.22}$$

$$\overline{E}_1 := \begin{bmatrix} E & O \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

$$E_1 := \begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

$$F_1 := \begin{bmatrix} F_1' & O \\ F_1'' & O \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} F_1' := \mathrm{diag}\big(-\sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes \beta_2^{n_3-1-i},\\ -\sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \otimes \beta_3^{n_1-1-i},\\ -\sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \otimes \beta_1^{n_2-1-i}\big), \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} F_1'' := \mathrm{diag}\big(-\sum_{i=0}^{n_3-2} \alpha_1^i a_{12} \otimes a_{12}\beta_2^{n_3-2-i},\\ -\sum_{i=0}^{n_1-2} \alpha_2^i a_{23} \otimes a_{23}\beta_3^{n_1-2-i},\\ -\sum_{i=0}^{n_2-2} \alpha_3^i a_{31} \otimes a_{31}\beta_1^{n_2-2-i}\big), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$L_1 := \begin{bmatrix} \Delta_1' & O \\ O & O \end{bmatrix}, \Delta_1' = \mathrm{diag}(e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_3, e_3 \otimes e_1), \tag{3.28}$$

$$L_1' := \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Delta_1'' \end{bmatrix}, \Delta_1'' = \mathrm{diag}(e_2 \otimes e_1, e_3 \otimes e_2, e_1 \otimes e_3), \tag{3.29}$$

$$\mathcal{E}_1 := \begin{bmatrix} O & O \\ O & \mathcal{E}_1' \end{bmatrix}, \mathcal{E}_1' := \mathrm{diag}(\alpha_2^{n_1-1} \otimes \beta_1^{n_2-1}, \alpha_3^{n_2-1} \otimes \beta_2^{n_3-1}, \alpha_1^{n_3-1} \otimes \beta_3^{n_1-1}), \tag{3.30}$$

$$\overline{E}_2 := \begin{bmatrix} O & E \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

$$E_2 := \begin{bmatrix} O & O \\ O & E \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$F_2 := \begin{bmatrix} O & \varphi(F_1'') \\ O & \varphi(F_1'), \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{E}_2 := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2' & O \\ O & O \end{bmatrix}, \mathcal{E}_2' := -\varphi(\mathcal{E}_1'), \tag{3.34}$$

$$\overline{E} := \overline{E}_1 + \overline{E}_2, \tag{3.35}$$

$$\mathrm{id}_{L_1^2} := E_1 + E_2, \tag{3.36}$$

$$F := F_1 + F_2, \tag{3.37}$$

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \tag{3.38}$$

$$\mathrm{id}_{L_2} := L_1 + L_1', \tag{3.39}$$

$$I^n := \begin{cases} \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_{L_2} & O \\ O & -\mathrm{id}_{L_1^2} \end{bmatrix}, & n \equiv 0 \pmod 6 \\ \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_{L_2} & O \\ O & -\mathrm{id}_{L_2} \end{bmatrix}, & n \equiv 1 \pmod 6 \\ \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_{L_1^2} & O \\ O & -\mathrm{id}_{L_2} \end{bmatrix}, & n \equiv 2 \pmod 6 \\ \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_{L_2} & O \\ O & -\mathrm{id}_{L_1^2} \end{bmatrix}, & n \equiv 3 \pmod 6 \\ \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_{L_2} & O \\ O & -\mathrm{id}_{L_2} \end{bmatrix}, & n \equiv 4 \pmod 6 \\ \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_{L_1^2} & O \\ O & -\mathrm{id}_{L_2} \end{bmatrix}, & n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases} \tag{3.40}$$

Заметим, что если одно из значений n_1, n_2, n_3 равно 1, то в матрице F_1'' соответствующую символьную сумму следует заменить нулем.

Обозначения $\mathrm{id}_{L_1^2}$, id_{L_2} выбраны не случайно. Для модулей $L_1 := \overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} P_{ii}$, $L_2 := \overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} P_{i,i+1} \bigoplus \overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} P_{i+1,i}$, определенных в [1], отображения, заданные этими матрицами, в самом деле суть тождественные отображения L_1^2, L_2 соответственно.

Лемма 1. *a. В качестве трансляций e можно взять проекции*

$$T^n(e) := \pi_n : Q_{n+4} \longrightarrow Q_n, n \geq 0. \tag{3.41}$$

b. В качестве трансляций остальных элементов из $\mathcal{Y}$ (ненулевой степени) можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:

$$T^0(w) = \Big[\mathrm{diag}(n_1n_2e_1 \otimes a_{12}, n_2n_3e_2 \otimes a_{23}, n_3n_1e_3 \otimes a_{31}) \quad O_{33}\Big], \tag{3.42}$$

$$T^1(w) = \begin{bmatrix} n_1n_2W'_{12} + n_2n_3W'_{23} + n_3n_1W'_{31} + n_1n_2n_3W'_{123} & O_{33} & W \\ n_1n_2W''_{12} + n_2n_3W''_{23} + n_3n_1W''_{31} + n_1n_2n_3W''_{123} & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

где

$$W'_{12} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-i-1}(i+1)\alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-i-1} i\beta_2^{n_3-i-1}a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

$$W''_{12} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-i-1}(i+1)\alpha_1^i a_{12} \otimes \alpha_1^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-i-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i-1} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

$$W'_{123} = \mathrm{diag}\left(\sum_{i=0}^{n_3-i-1} \alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1}, \sum_{i=0}^{n_1-i-1} \alpha_2^i \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-i-1}, \sum_{i=0}^{n_2-i-1} \alpha_3^i \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-i-1}\right), \tag{3.46}$$

$$W''_{123} = \mathrm{diag}\left(\sum_{i=0}^{n_3-i-1} \alpha_1^i a_{12} \otimes \alpha_1^{n_3-i-1}, \sum_{i=0}^{n_1-i-1} \alpha_2^i a_{23} \otimes \alpha_2^{n_1-i-1}, \sum_{i=0}^{n_2-i-1} \alpha_3^i a_{31} \otimes \alpha_3^{n_2-i-1}\right), \tag{3.47}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_2n_3e_1 \otimes a_{23} \\ n_1n_3e_2 \otimes a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & n_1n_2e_3 \otimes a_{12} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

матрицы W'_{23}, W'_{31}, (соотв. W''_{23}, W''_{31}) получаются из W'_{12} (соотв. W''_{12}) циклическим сдвигом столбцов и строк и заменой индексов при a_{12}, α_1, β_2, n_3 на *соответствующие.*

$$T^0(z_1) = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(e_1 \otimes a_{12}, 0, 0) & \mathrm{diag}(-a_{21} \otimes e_1, 0, 0) \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

$$T^1(z_1) = \begin{bmatrix} Z_1' & O_{33} & Z_2' \\ Z_1'' & Z_2'' & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

где

$$Z_1' = \mathrm{diag}\left(-\sum_{i=0}^{n_3-i-1} \alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1}, 0, 0\right), Z_1'' = \varphi(Z_1'), \tag{3.51}$$

$$Z_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_3 \otimes a_{12} & 0 \end{pmatrix}, Z_2'' = -\varphi(Z_2'). \tag{3.52}$$

$$T^0(x_{12}) = \begin{bmatrix} X_{12} & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.53}$$

$$T^1(x_{12}) = \begin{bmatrix} X_{12}' & O_{33} & O_{33} & O_{33} \\ O_{33} & X_{12}'' & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.54}$$

$$T^2(x_{12}) = \begin{bmatrix} -X_{12} & O_{33} & O_{33} & O_{33} & O_{33} \\ O_{33} & -X_{12}' & O_{33} & O_{33} & O_{33} \\ O_{33} & O_{33} & X_{12}'' & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.55}$$

где

$$X_{12} = \mathrm{diag}(\alpha_1 \otimes e_1, -\beta_2 \otimes e_2, 0), \tag{3.56}$$

$$X_{12}' = \mathrm{diag}(-\alpha_1 \otimes e_2, \beta_2 \otimes e_3, 0), \tag{3.57}$$

$$X_{12}'' = \mathrm{diag}(-\beta_2 \otimes e_1, 0, \alpha_1 \otimes e_3). \tag{3.58}$$

$T^i(x_{23})$, $T^i(x_{31})$ *имеют такую же блочную структуру, как и соответствующие* $T^i(x_{12})$, *и состоят из блоков* X_{23}, X_{23}', X_{23}'', *(соотв.* X_{31}, X_{31}', X_{31}''*), которые получаются из* X_{12}, X_{12}', X_{12}'' *циклическим сдвигом строк, столбцов и индексов.*

$$T^0(u_1) = \begin{bmatrix} O_{33} & U_1 & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.59}$$

$$T^1(u_1) = \begin{bmatrix} O_{33} & O_{33} & U_1' & O_{33} \\ O_{33} & O_{33} & U_1'' & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

$$T^2(u_1) = \begin{bmatrix} O_{33} & -U_1 & O_{33} & O_{33} & O_{33} \\ O_{33} & \widehat{U}_1 & O_{33} & O_{33} & \widehat{U}_1'' \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

где

$$U_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1^{n_3-1} \otimes a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} \otimes a_{23}, \alpha_3^{n_2-1} \otimes a_{31}), \tag{3.62}$$

$$U_1' = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n_3-1} \otimes a_{21} & -\beta_2^{n_3-1} a_{21} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{n_1-1} \otimes a_{32} & -\beta_3^{n_1-1} a_{32} \otimes e_3 \\ -\beta_1^{n_2-1} a_{13} \otimes e_1 & 0 & \alpha_3^{n_2-1} \otimes a_{13} \end{pmatrix}, \tag{3.63}$$

$$U_1'' = \operatorname{diag}(\alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes e_1, \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes e_2, \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes e_3), \tag{3.64}$$

$$\widehat{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_3^{n_1-1} a_{32} \otimes \beta_1^{n_2-1} \\ \beta_1^{n_2-1} a_{13} \otimes \beta_2^{n_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^{n_3-1} a_{21} \otimes \beta_3^{n_1-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.65}$$

$$\widehat{U}_1'' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes e_3 \\ \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes e_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.66}$$

$$T^0(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E}_1 \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

$$T^1(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} O & O & F_1 & -L_1' \end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

$$T^2(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E}_1 & O \\ O & O & \mathcal{E}_1 & O & -L_1 \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

$$T^3(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} O & O & F_1 & -L_1' & O \\ O & O & O & O & -E_1 \end{pmatrix}, \tag{3.70}$$

$$T^4(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E}_1 & O & O \\ O & O & \mathcal{E}_1 & O & -L_1 & O \\ O & O & O & O & O & -L_1' \end{pmatrix}, \tag{3.71}$$

$$T^0(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

$$T^1(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} O & O & F_2 & -L_2' \end{pmatrix}, \tag{3.73}$$

$$T^2(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E}_2 & O \\ O & O & \mathcal{E}_2 & O & -L_2 \end{pmatrix}, \tag{3.74}$$

$$T^3(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} O & O & F_2 & -L_2' & O \\ O & O & O & O & -E_2 \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

$$T^4(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E}_2 & O & O \\ O & O & \mathcal{E}_2 & O & -L_2 & O \\ O & O & O & O & O & -L_2' \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

c. *В качестве трансляций* $\hat{e} := \hat{e_1} + \hat{e_2}$ *можно взять гомоморфизмы, заданные сле-*

дующими матрицами:

$$T^0(\hat{e}) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E} \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

$$T^1(\hat{e}) = \begin{pmatrix} O & O & F & -\mathrm{id}_{L_2} \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

$$T^2(\hat{e}) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E} & O \\ O & O & \mathcal{E} & O & -\mathrm{id}_{L_2} \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

$$T^3(\hat{e}) = \begin{pmatrix} O & O & F & -\mathrm{id}_{L_2} & O \\ O & O & O & O & -\mathrm{id}_{L_1^2} \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

$$T^4(\hat{e}) = \begin{pmatrix} O & O & O & \overline{E} & O & O \\ O & O & \mathcal{E} & O & -\mathrm{id}_{L_2} & O \\ O & O & O & O & O & -\mathrm{id}_{L_2} \end{pmatrix}, \tag{3.81}$$

$$T^n(\hat{e}) = \begin{pmatrix} T^{n-4} & O \\ O & I^n \end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Доказательство. Для доказательства пункта a. достаточно заметить, что $\mu T^0(e) = \mu\pi_0 = e$.

Доказательство пункта b. заключается в прямой проверке соответствующих соотношений, а именно, $\mu T^0(f) = f$, $d_n T^{n+1}(f) = T^n(f)d_{n+m}$, где m – степень элемента $f \in \mathrm{HH}^*(R)$.

В пункте c. справедливость (3.77)-(3.81) следует непосредственно из описания трансляций для $\hat{e}_1, \hat{e}_2$, данных в пункте b.; соотношение (3.82) проверяется непосредственно для $n = 5, 6, 7$ и 8, и доказывается по индукции для $n \geq 9$ с учетом строения дифференциала d_Q комплекса $Q_\bullet$. □

Доказательство предложения 1. Рассмотрим K-алгебру $\mathcal{H}$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_0$. Достаточно показать, что для $\forall m$, $\mathrm{HH}^m(R) \subset \mathcal{H}$.

Очевидно, $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Поскольку

$$c_{12}^i w = n_1 n_2(\alpha_1^i a_{12}, O_5), i = \overline{1, n_3 - 1}, \tag{3.83}$$

$$c_{23}^i w = n_2 n_3(0, \alpha_2^i a_{23}, O_4), i = \overline{1, n_1 - 1}, \tag{3.84}$$

$$c_{31}^i w = n_3 n_1(0, 0, \alpha_1^i a_{31}, O_3), i = \overline{1, n_2 - 1}, \tag{3.85}$$

то и $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, поскольку

$$z_1 w = -n_1 n_2 n_3(\alpha_1^{n_3}, O_8), \tag{3.86}$$

то и $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Так как

$$c_{12}^i wx_{12} = -n_1n_2(\alpha_1^{i+1}a_{12}, O_{11}), i = \overline{0, n_3-2} \quad (3.87)$$
$$c_{23}^i wx_{23} = -n_2n_3(0, \alpha_2^{i+1}a_{23}, O_{10}), i = \overline{0, n_1-2} \quad (3.88)$$
$$c_{31}^i wx_{31} = -n_3n_1(0, 0, \alpha_3^{i+1}a_{31}, O_9), i = \overline{0, n_2-2} \quad (3.89)$$
$$z_1u_1 = -(O_6, \alpha_1^{n_3}, O_5), \quad (3.90)$$
$$z_1u_2 = -(O_9, \alpha_1^{n_3}, 0, 0), \quad (3.91)$$

то и $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Нетрудно видеть, что $c_{i,i+1}^k e$ покрывают всю $\mathrm{HH}^4(R)$, поэтому и $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$, $c_{i,i+1}^k we$, z_1e покрывают всю $\mathrm{HH}^5(R)$, откуда $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$, и наконец, произведения e с $c_{12}^i x_{12}$, $c_{23}^j x_{23}$, $c_{31}^k x_{31}$, wz_1, (для подходящих индексов i, j, k), а также $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ образуют всю $\mathrm{HH}^6(R)$, то есть и $\mathrm{HH}^6(R) \subset \mathcal{H}$.

Для $\mathrm{HH}^7(R)$ имеем:

$$w\hat{e}_1 = -n_1n_2n_3(O_{12}, a_{12}\beta_2^{n_3-1}, a_{23}\beta_3^{n_1-1}, a_{23}\beta_1^{n_2-1}, O_9), \quad (3.92)$$
$$z_1\hat{e}_1 = (O_{12}, -a_{12}\beta_2^{n_3-1}, O_8, a_{21}, O_2), \quad (3.93)$$
$$w\hat{e}_2 = -n_1n_2n_3(O_{15}, \beta_2^{n_3-1}a_{21}, \beta_3^{n_1-1}a_{32}, \beta_1^{n_2-1}a_{13}, O_6), \quad (3.94)$$
$$z_1\hat{e}_2 = (O_{15}, -\beta_2^{n_3-1}a_{21}, O_2, a_{12}, O_5), \quad (3.95)$$

и нетрудно видеть, что произведения e с элементами $\mathrm{HH}^2(R)$ лежат в $\mathrm{HH}^7(R)$, и покрывают её базис, таким образом, вся $\mathrm{HH}^7(R) \subset \mathcal{H}$.

Наконец, для $\mathrm{HH}^8(R)$:

$$u_1\hat{e}_1 = -(O_{21}, \alpha_1^{n_3-1}a_{21}, \alpha_2^{n_1-1}a_{32}, \alpha_3^{n_2-1}a_{13}, O_3), \quad (3.96)$$
$$u_2\hat{e}_2 = -(O_{24}, a_{21}\alpha_1^{n^3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{31}\alpha_3^{n_2-1}), \quad (3.97)$$
$$z_1w\hat{e}_1 = -n_1n_2n_3(O_{15}, \alpha_1^{n_3}, O_{11}), \quad (3.98)$$
$$z_1w\hat{e}_2 = -n_1n_2n_3(O_{18}, \alpha_1^{n_3}, O_8), \quad (3.99)$$

а оставшиеся элементы базиса суть произведения e с элементами $\mathrm{HH}^4(R)$.

Докажем теперь по индукции, что $\mathrm{HH}^m(R) \subset \mathcal{H}$. Пусть доказано, что для натурального $m \geq 9$ все элементы степени меньшей m представляются как линейные комбинации произведений из $\mathcal{H}$. Для произвольного коцикла $f : Q_m \longrightarrow R$ можно считать, что $f(B_{i,m-i}) \neq 0$ только для одного индекса i, где $B_{i,m-i}$ – прямые слагаемые, входящие в разложение Q_m – модули, стоящие на m-ой диагонали комплекса (3.2) из [1].

Если $i > 1$, то существует гомоморфизм $\widetilde{f} : Q_{m-4} \longrightarrow R$, такой что $f = \widetilde{f}\pi_m$, где π_m – проекция Q_m на Q_{m-4}, то есть $f = \widetilde{f}e$, и для $\widetilde{f}$ применим предположение индукции.

Если $i=1$, то (при $m \geq 9$) $B_{1,m-1} = B_{1,m-6-1}$, и записывая f как $(O, f', 0)$, имеем гомоморфизм $g_1 = (O, f', 0) : Q_{m-6} \longrightarrow R$. Поскольку $T^m(\hat{e})$ имеет блочно-диагональный вид, и матрица I^m тоже блочно-диагональная, причем на диагонали I^m стоят тождественные отображения модулей $B_{1,m-1}$, $B_{0,m}$ (со знаком минус), то $f = -g_1\hat{e}$.

Аналогично и для $i = 0$, $B_{0,m} = B_{0,m-6}$, поэтому для $f = (O, f')$ существует $g_2 = (O, f') : Q_{m-6} \longrightarrow R$, и $f = -g_2\hat{e}$.

Поэтому для произвольного m $\mathrm{HH}^m(R) \subset \mathcal{H}$, что завершает доказательство. □

Предложение 2. *В алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения:*

$$c_{12}^{n_3+1} = 0, c_{23}^{n_1+1} = 0, c_{31}^{n_2+1} = 0, \tag{3.100}$$

$$c_{12}c_{23} = c_{23}c_{31} = c_{31}c_{12} = 0, \tag{3.101}$$

$$c_{12}^{n_3}w = c_{23}^{n_1}w = c_{31}^{n_2}w = 0, \tag{3.102}$$

$$c_{12}z_1 = c_{23}z_1 = c_{31}z_1 = 0, \tag{3.103}$$

$$c_{i,i+1}u_j = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \tag{3.104}$$

$$c_{12}^{n_3-1}x_{12} = c_{23}^{n_1-1}x_{23} = c_{31}^{n_2-1}x_{31} = 0, \tag{3.105}$$

$$c_{i,i+1}x_{j,j+1} = 0, i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \tag{3.106}$$

$$w^2 = (3n_1n_2n_3 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_1)wz_1, \tag{3.107}$$

$$z_1^2 = 0, \tag{3.108}$$

$$z_1x_{12} = z_1x_{23} = z_1x_{31} = 0, \tag{3.109}$$

$$wu_1 = wu_2 = 0, \tag{3.110}$$

$$u_iu_j = 0, i = 1, 2, j = 1, 2, \tag{3.111}$$

$$x_{12}^2 = -c_{12}e, x_{23}^2 = -c_{23}e, x_{31}^2 = -c_{31}e, \tag{3.112}$$

$$x_{12}x_{23} = x_{23}x_{31} = x_{31}x_{12} = 0, \tag{3.113}$$

$$c_{12}^{n_3}e = c_{23}^{n_1}e = c_{31}^{n_2}e = 0, \tag{3.114}$$

$$u_kx_{i,i+1} = 0, i = 1, 2, 3, k = 1, 2, \tag{3.115}$$

$$eu_1 = eu_2 = 0, \tag{3.116}$$

$$\hat{e}_2u_1 = \hat{e}_1u_2 = 0, \tag{3.117}$$

$$\hat{e}_ix_{j,j+1} = 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, \tag{3.118}$$

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = 0. \tag{3.119}$$

Доказательство. Осуществляется прямыми вычислениями с использованием трансляций, указанных в лемме 1. □

3.2 Случай $p|n_1$

Теперь рассмотрим случай, когда характеристика p поля K делит ровно одно из значений n_1, n_2, n_3. Не умаляя общности можно считать, что $p|n_1$. В этом случае $\operatorname{rk} C = 2$, $\operatorname{rk} C_1 = 2$.

Рассмотрим элементы алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 1:

$$w_{23} := (0, a_{23}, 0, O_3); \tag{3.120}$$

$$x_1 := (\alpha_1 a_{12}, O_5); \tag{3.121}$$

$$x_3 := (0, 0, \alpha_3 a_{31}, O_3). \tag{3.122}$$

– степени 2:

$$\zeta := (\alpha_1^{n_3}, O_8). \tag{3.123}$$

– степени 3:

$$\widehat{x}_1 := (\alpha_1 a_{12}, O_{11}); \tag{3.124}$$

$$\widehat{x}_3 := (0, 0, \alpha_3 a_{31}, O_9), \tag{3.125}$$

$$\widehat{w}_{23} := (0, a_{23}, O_{10}). \tag{3.126}$$

– степени 7:

$$\widehat{u}_1 := (O_{12}, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_2^{n_2-1} a_{31}, O_9); \tag{3.127}$$

$$\widehat{u}_2 := (O_{15}, a_{12}\alpha_1^{n_3-1}, a_{23}\alpha_2^{n_1-1}, a_{31}\alpha_2^{n_2-1}, O_6). \tag{3.128}$$

Обозначим множество $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{Y} \setminus \{w\} \cup \{w_{23}, x_1, x_3, \zeta, \widehat{x}_1, \widehat{x}_3, \widehat{w}_{23}, \widehat{u}_1, \widehat{u}_2\}$.

Трансляции элементов из $\mathcal{Y}_1$ представлены в следующей лемме.

Лемма 2. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \mathcal{Y}$ можно взять следующие гомоморфизмы:*

a.

$$T^0(w_{23}) = \begin{bmatrix} W_{23} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.129}$$

$$T^1(w_{23}) = \begin{bmatrix} W'_{23} & O_{33} & O_{33} \\ W''_{23} & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.130}$$

$$T^0(\widehat{w}_{23}) = \begin{bmatrix} W_{23} & O_{33} & O_{33} & O_{33}) \end{bmatrix}, \tag{3.131}$$

$$T^1(\widehat{w}_{23}) = \begin{bmatrix} \widehat{W}'_{23} & O_{33} & \widetilde{W}_{23} & O_{39} \\ \widehat{W}''_{23} & O_{33} & O_{33} & O_{39} \end{bmatrix}, \tag{3.132}$$

$$T^2(\widehat{w}_{23}) = \begin{bmatrix} W_{23} & O_{33} & O_{33} & O_{33} & O_{36} \\ O_{33} & O_{33} & O_{33} & O_{33} & O_{36} \\ \widetilde{W}'_{23} & O_{33} & O_{33} & \widehat{W}_{23} & O_{36} \end{bmatrix}, \tag{3.133}$$

$$T^3(\widehat{w}_{23}) = \begin{bmatrix} -\widehat{W}'_{23} & O_{33} & \widetilde{W}_{23} & O_{33} & O \\ -\widehat{W}''_{23} & O_{33} & O_{33} & O_{33} & O \\ O_{33} & O_{33} & O_{33} & O_{33} & O \\ O_{33} & O_{33} & \widetilde{W}''_{23} & -\varphi(\widehat{W}_{23}) & O \end{bmatrix}. \tag{3.134}$$

где W'_{23}, W''_{23} *определены в лемме 1,*

$$W_{23} = \operatorname{diag}(0, e_2 \otimes a_{23}, 0), \tag{3.135}$$

$$\widehat{W}'_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum\limits_{i=0}^{n_1-1}(i+1)\alpha_2^i \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-i-1} & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1} i\beta_3^{n_1-i}a_{32} \otimes \beta_3^i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.136}$$

$$\widehat{W}''_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum\limits_{i=0}^{n_1-1}(i+1)\alpha_2^i \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-i-1} & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1}(i+1)\beta_3^{n_1-i}a_{32} \otimes \beta_3^i \end{pmatrix}, \tag{3.137}$$

$$\widetilde{W}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 \otimes a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.138}$$

$$\widetilde{W}'_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_1 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.139}$$

$$\widehat{W}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \otimes a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.140}$$

b.

$$T^0(x_1) = \begin{bmatrix} X_1 & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.141}$$

$$T^1(x_1) = \begin{bmatrix} X_1' & O_{33} & O_{33} \\ X_1'' & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.142}$$

$$T^0(\widehat{x}_1) = \begin{bmatrix} X_1 & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.143}$$

$$T^1(\widehat{x}_1) = \begin{bmatrix} \widehat{X}_1' & O_{33} & O_{33} & O_{33} \\ \widehat{X}_1'' & O_{33} & O_{33} & O_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.144}$$

$$T^2(\widehat{x}_1) = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_1'' & O_{3,12} \\ O_{33} & O_{33} & O_{3,12} \\ \widetilde{X}_1' & O_{33} & O_{3,12} \end{bmatrix}, \tag{3.145}$$

$$T^3(\widehat{x}_1) = \begin{bmatrix} \overline{X}_1' & O_{33} & \widetilde{X}_1''' & O \\ \overline{X}_1'' & O_{33} & O_{33} & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \tag{3.146}$$

где

$$X_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1 \otimes a_{12}, 0, 0), \tag{3.147}$$

$$X_1' = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1} (i+1)\alpha_1^{i+1} \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1} i\beta_2^{n_3-i} a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & n_3\beta_2 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.148}$$

$$X_1'' = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} i\alpha_1^i a_{12} \otimes \alpha_1^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1} (i+1)\beta_2^{n_3-i} \otimes a_{12}\beta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.149}$$

$$\widehat{X}_1' = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1} (i+1)\alpha_1^{i+1} \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} i\beta_2^{n_3-i} a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & -n_3\beta_2 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.150}$$

$$\widehat{X}_1'' = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1} i\alpha_1^i a_{12} \otimes \alpha_1^{n_3-i-1} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} (i+1)\beta_2^{n_3-i} \otimes a_{12}\beta_2^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.151}$$

$$\widetilde{X}_1 = \operatorname{diag}\big((n_3+1)\alpha_1 \otimes a_{12}, -n_3\beta_2 \otimes a_{23}, 0\big), \tag{3.152}$$

$$\widetilde{X}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_3\alpha_1 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.153}$$

$$\widetilde{X}_1'' = \operatorname{diag}(-n_3 a_{21} \otimes \alpha_1, 0, 0), \tag{3.154}$$

$$\overline{X}_1' = \begin{pmatrix} -\sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^{i+1} \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1} & -\sum_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i-1}a_{21} \otimes \beta_2^{i+1} & 0 \\ 0 & -n_3\beta_2 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.155}$$

$$\overline{X}_1'' = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i}a_{21} \otimes \beta_2^{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.156}$$

$$\overline{X}_1'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n_3\alpha_1 \otimes a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.157}$$

c.

$$T^0(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & U_1^0 & O \end{bmatrix}, \tag{3.158}$$

$$T^1(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & O & U_1^1 & O \end{bmatrix}, \tag{3.159}$$

$$T^2(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & -U_1^0 & O & O \\ O & O & U_1^3 & U_1^4 & O \end{bmatrix}, \tag{3.160}$$

$$T^3(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & O & \widehat{U}_1^1 & O \\ O & O & O & O & U_1^5 \end{bmatrix}, \tag{3.161}$$

$$T^4(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & U_1^0 & O & O & O \\ O & O & -U_1^3 & U_1^4 & O & O \\ O & O & O & O & U_1^6 & O \end{bmatrix}, \tag{3.162}$$

$$T^5(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & O & U_1^1 & O & O & O \\ O & O & O & O & U_1^5 & O & O \\ O & O & O & O & O & U_1^4 & O \end{bmatrix}, \tag{3.163}$$

$$T^6(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & U_1^0 & O & O & O & O \\ O & O & -U_1^3 & U_1^4 & O & O & O \\ O & O & O & O & U_1^6 & O & O \\ O & O & O & O & O & U_1^5 & O \end{bmatrix}, \tag{3.164}$$

$$T^7(\widehat{u}_1) = \begin{bmatrix} O & O & O & U_1^1 & O & O & O & O \\ O & O & O & O & U_1^5 & O & O & O \\ O & O & O & O & O & U_1^4 & O & O \\ O & O & O & O & O & O & U_1^6 & O \end{bmatrix}, \tag{3.165}$$

где

$$U_1^0 = \begin{bmatrix} U_1 & O \end{bmatrix}, \tag{3.166}$$

$$U_1^1 = \begin{bmatrix} U_1' & O \\ U_1'' & O \end{bmatrix}, \tag{3.167}$$

$$U_1^3 = \begin{bmatrix} O & O \\ \widetilde{U}_1' & O \end{bmatrix}, \tag{3.168}$$

$$U_1^4 = \begin{bmatrix} O & \overline{U}_1' \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{3.169}$$

$$U_1^5 = \begin{bmatrix} \overline{U}_1'' & O \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{3.170}$$

$$U_1^6 = \begin{bmatrix} O & O \\ U_1'' & O \end{bmatrix}, \tag{3.171}$$

$$\widehat{U}_1^1 = \begin{bmatrix} \widehat{U}_1' & O \\ \widehat{U}_1'' & O \end{bmatrix}; \tag{3.172}$$

где матрицы U_1, U_1', U_1'' *описаны в лемме 1, а*

$$\widetilde{U}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_3^{n_1-1}a_{32}\otimes\beta_1^{n_2-1} \\ \beta_1^{n_2-1}a_{13}\otimes\beta_2^{n_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^{n_3-1}a_{21}\otimes\beta_3^{n_1-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.173}$$

$$\overline{U}_1' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3^{n_2-1}a_{31}\otimes e_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{n_3-1}a_{12}\otimes e_3 \\ \alpha_2^{n_1-1}a_{23}\otimes e_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.174}$$

$$\overline{U}_1'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3^{n_2-1}a_{31}\otimes e_1 \\ -\alpha_1^{n_3-1}a_{12}\otimes e_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2^{n_1-1}a_{23}\otimes e_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.175}$$

$$\widehat{U}_1' = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n_3-1}\otimes a_{21} & \beta_2^{n_3-1}a_{21}\otimes e_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{n_1-1}\otimes a_{32} & \beta_3^{n_1-1}a_{32}\otimes e_3 \\ \beta_1^{n_2-1}a_{13}\otimes e_1 & 0 & \alpha_3^{n_2-1}\otimes a_{13} \end{pmatrix}, \tag{3.176}$$

$$\widehat{U}_1'' = U_1''. \tag{3.177}$$

Предложение 3. *Пусть* $p|n_1$. *В предложении 2 нужно заменить соотношение* (3.102) *на*

$$c_{12}w_{23} = c_{23}^{n_1}w_{23} = c_{31}w_{23} = 0, \tag{3.178}$$

соотношение (3.110) *на*

$$w_{23}^2 = w_{23}z_1 = 0, \tag{3.179}$$

и соотношение (3.114) *на*

$$c_{12}^{n_3}e = c_{23}^{n_1+1}e = c_{31}^{n_2}e = 0. \tag{3.180}$$

Кроме того, в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения*

$$c_{12}^{n_3-1}x_1 = c_{23}x_1 = c_{31}x_1 = 0, \tag{3.181}$$

$$c_{12}x_3 = c_{23}x_3 = c_{31}^{n_2-1}x_3 = 0, \tag{3.182}$$

$$c_{12}w_{23} = c_{31}w_{23} = 0, \tag{3.183}$$

$$x_1x_3 = x_1w_{23} = x_3w_{23} = 0, \tag{3.184}$$

$$x_1^2 = x_3^2 = w_{23}^2 = w_{23}z_1 = 0, \tag{3.185}$$

$$c_{i,i+1}\zeta = 0, i = 1, 2, 3, \tag{3.186}$$

$$w_{23}x_{12} = w_{23}x_{31} = 0, \tag{3.187}$$

$$w_{23}x_{23} = c_{23}\widehat{w}_{23}, \tag{3.188}$$

$$x_{12}x_1 = -c_{12}\widehat{x}_1, x_{31}x_3 = -c_{31}\widehat{x}_3, \tag{3.189}$$

$$x_{23}x_1 = x_{31}x_1 = x_{12}x_3 = x_{23}x_3 = 0, \tag{3.190}$$

$$c_{12}^{n_3-1}\widehat{x}_1 = c_{23}\widehat{x}_1 = c_{31}\widehat{x}_1 = 0, \tag{3.191}$$

$$c_{12}\widehat{x}_3 = c_{23}\widehat{x}_3 = c_{31}^{n_2-1}\widehat{x}_3 = 0, \tag{3.192}$$

$$w_{23}u_j = x_iu_j = 0, i = 1, 3, j = 1, 2, \tag{3.193}$$

$$x_i\zeta = w_{23}\zeta = z_1\zeta = 0, i = 1, 3 \tag{3.194}$$

$$x_i\widehat{x}_j = 0, i = 1, 3, j = 1, 3, \tag{3.195}$$

$$x_1\widehat{w}_{23} = x_2\widehat{w}_{23} = w_{23}\widehat{w}_{23} = z_1\widehat{w}_{23} = 0, \tag{3.196}$$

$$\zeta^2 = 0, \tag{3.197}$$

$$x_{12}\widehat{x}_1 = c_{12}x_1e, \tag{3.198}$$

$$x_{23}\widehat{x}_1 = x_{31}\widehat{x}_1 = 0, \tag{3.199}$$

$$x_{31}\widehat{x}_3 = c_{31}x_3e, \tag{3.200}$$

$$x_{12}\widehat{x}_1 = x_{23}\widehat{x}_1 = 0, u_i\widehat{x}_j = u_i\widehat{u}_i = u_i\widehat{u}_{i+1} = 0, i = 1, 2, j = 1, 3, \tag{3.201}$$

$$x_{12}\widehat{w}_{23} = x_{31}\widehat{w}_{23} = 0, \tag{3.202}$$

$$x_{23}\widehat{w}_{23} = c_{23}w_{23}e, \tag{3.203}$$

$$\zeta\widehat{x}_i = \zeta\widehat{w}_{23} = 0, i = 1, 3, \tag{3.204}$$

$$\widehat{x}_i\widehat{w}_{23} = \widehat{w}_{23}^2 = 0, i = 1, 3, \tag{3.205}$$

$$c_{i,i+1}\widehat{u}_1 = c_{i,i+1}\widehat{u}_2 = 0, i = 1, 2, 3, \tag{3.206}$$

$$x_i\widehat{u}_j = 0, i = 1, 3, j = 1, 2, \tag{3.207}$$

$$w_{23}\widehat{u}_1 = z_1\widehat{u}_1, w_{23}\widehat{u}_2 = z_1\widehat{u}_2, \tag{3.208}$$

$$x_{i,i+1}\widehat{u}_j = \zeta\widehat{u}_j = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \tag{3.209}$$

$$u_i\widehat{u}_j = 0, i = 1,2, j = 1,2, \tag{3.210}$$

$$\widehat{x}_i\widehat{u}_j = \widehat{w}_{23}\widehat{u}_j = 0, i = 1,3, j = 1,2, \tag{3.211}$$

$$\widehat{u}_i\widehat{u}_j = 0, i = 1,2, j = 1,2. \tag{3.212}$$

Предложение 4. *Пусть* $p|n_1$. *Тогда множество* $\{1\} \cup \mathcal{Y}_1$ *порождает алгебру* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Заметим, что в случае $p|n_1$ элемент $w = n_2n_3w_{23}$. Доказательство предложения 1 переносится на случай $p|n_1$ с теми изменениями, что мы добавили "недостающие" элементы базисов групп $\mathrm{HH}^n(R)$ в множество образующих. □

4 Доказательство теоремы

4.1 Случай $p \nmid n_1n_2n_3$

Расмотрим алгебру $\mathcal{A} := K[\mathcal{X}]/I$, определенную в разделе 2 (см. (2.10) - (2.30)).

Из соображений раздела 3 ясно, что существует сюръективный гомоморфизм K-алгебр $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие алгебры $\mathcal{A}$ в одноименные образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. Обозначим через $\mathcal{A}^m$ однородную компоненту степени m алгебры $\mathcal{A}$. Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать

Предложение 5.

$$\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.1}$$

Будем называть образ монома из $K[\mathcal{X}]$ при каноническом отображении также мономом. Введем на $\mathcal{A}$ порядок так, что

$$c_{12} < c_{23} < c_{31} < z_1 < w < e < \hat{e}_1 < \hat{e}_2 < x_{12} < x_{23} < x_{31} < u_1 < u_2. \tag{4.2}$$

Произвольный моном из $\mathcal{A}^m$ представляется с точностью до константы из K как

$$c_{12}^{k_1}c_{23}^{k_2}c_{31}^{k_3}z_1^iw^je^\varepsilon\hat{e}_1^s\hat{e}_2^tx_{12}^\alpha x_{23}^\beta x_{31}^\gamma u_1^au_2^b. \tag{4.3}$$

Введем следующие элементарные шаги редукции:

$$w^2 \Rightarrow z_1w, \tag{4.4}$$

$$x_{12}^2 \Rightarrow c_{12}e, \tag{4.5}$$

$$x_{23}^2 \Rightarrow c_{23}e, \tag{4.6}$$

$$x_{31}^2 \Rightarrow c_{31}e. \tag{4.7}$$

Тогда, применяя эти шаги редукции к произвольной форме монома, можем добиться того, что никакую редукцию применить нельзя. Назовем такую форму монома "нормальной". Видно, что в нормальной форме монома показатели степени α, β, γ и j не превосходят 1.

Теперь ненулевой моном из $\mathcal{A}^m$ имеет вид:

$$c_{12}^{k_1}c_{23}^{k_2}c_{31}^{k_3}z_1^i w^j e^{\varepsilon}\hat{e}_1^s\hat{e}_2^t x_{12}^{\alpha}x_{23}^{\beta}x_{31}^{\gamma}u_1^a u_2^b. \tag{4.8}$$

где

$$0 \le k_1 \le n_3, \tag{4.9}$$
$$0 \le k_2 \le n_1, \tag{4.10}$$
$$0 \le k_3 \le n_2, \tag{4.11}$$
$$i, j \in \{0, 1\}, \tag{4.12}$$
$$\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}, \tag{4.13}$$
$$a, b \in \{0, 1\}, \tag{4.14}$$
$$i + j + 2(\alpha + \beta + \gamma + a + b) + 4\varepsilon + 6(s + t) = m. \tag{4.15}$$

Кроме того, исходя из соотношений алгебры $\mathcal{A}$, $ab = 0$, и если $a = 1$ или $b = 1$, то $k_1 = k_2 = k_3 = \alpha = \beta = \gamma = j = \varepsilon = 0$. Более того, $at = bs = 0$. Таким образом, единственными мономами, содержащими u_1 или u_2, являются

$$z_1^i\hat{e}_1^s\hat{e}_2^t u_1^a u_2^b, \tag{4.16}$$

Итак, докажем теперь, что для $m \le 4$, количество мономов степени m совпадает с размерностью $\mathrm{HH}^m(R)$. Для этого перечислим все такие мономы.

1. степени 0:

$$1, \tag{4.17}$$
$$c_{12}^{k_1}, k_1 = \overline{1, n_3}, \tag{4.18}$$
$$c_{23}^{k_2}, k_2 = \overline{1, n_1}, \tag{4.19}$$
$$c_{31}^{k_3}, k_3 = \overline{1, n_2}. \tag{4.20}$$

2. степени 1:

$$z_1, \tag{4.21}$$
$$w, \tag{4.22}$$
$$c_{12}^{k_1}w, k_1 = \overline{1, n_3 - 1}, \tag{4.23}$$

$$c_{23}^{k_2}w, k_2 = \overline{1, n_1 - 1}, \tag{4.24}$$

$$c_{31}^{k_3}w, k_3 = \overline{1, n_2 - 1}. \tag{4.25}$$

3. степени 2:

$$z_1 w, \tag{4.26}$$

$$c_{12}^{k_1}x_{12}, k_1 = \overline{0, n_3 - 2}, \tag{4.27}$$

$$c_{23}^{k_2}x_{23}, k_2 = \overline{0, n_1 - 2}, \tag{4.28}$$

$$c_{31}^{k_3}x_{31}, k_3 = \overline{0, n_2 - 2}, \tag{4.29}$$

$$u_1, \tag{4.30}$$

$$u_2. \tag{4.31}$$

4. степени 3:

$$c_{12}^{k_1}wx_{12}, k_1 = \overline{0, n_3 - 2}, \tag{4.32}$$

$$c_{23}^{k_2}wx_{23}, k_2 = \overline{0, n_1 - 2}, \tag{4.33}$$

$$c_{31}^{k_3}wx_{31}, k_3 = \overline{0, n_2 - 2}, \tag{4.34}$$

$$z_1 u_1, \tag{4.35}$$

$$z_1 u_2. \tag{4.36}$$

5. степени 4:

$$e, \tag{4.37}$$

$$c_{12}^{k_1}e, k_1 = \overline{1, n_3 - 1}, \tag{4.38}$$

$$c_{23}^{k_2}e, k_2 = \overline{1, n_1 - 1}, \tag{4.39}$$

$$c_{31}^{k_3}e, k_3 = \overline{1, n_2 - 1}. \tag{4.40}$$

Из этого перечисления видно, что

$$\dim_K \mathcal{A}^0 = N + 1 \qquad = \dim_K \mathrm{HH}^0(R), \tag{4.41}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^1 = N - 1 \qquad = \dim_K \mathrm{HH}^1(R), \tag{4.42}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^2 = N \qquad = \dim_K \mathrm{HH}^2(R), \tag{4.43}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^3 = N - 1 \qquad = \dim_K \mathrm{HH}^3(R), \tag{4.44}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^4 = N - 2 \qquad = \dim_K \mathrm{HH}^4(R). \tag{4.45}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3. *Для* $n \geq 5$,

$$\dim_K \mathcal{A}^n - \dim_K \mathcal{A}^{n-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 0,4,5 \pmod 6, \\ 2, & \text{если } n \equiv 1,3 \pmod 6, \\ 4, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6. \end{cases} \tag{4.46}$$

Доказательство. Для каждого вычета $\pmod 6$ будем рассматривать отдельно мономы вида (4.8) с показателем $\varepsilon > 0$ при e, и мономы, в которых $\varepsilon = 0$. Для последних, при $m \geq 6$, выполнено, что $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

1. Пусть $n \equiv 0 \pmod 6$. Мономы, в которых показатель $\varepsilon > 0$ при e, находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$, в которых отсутствуют u_1, u_2, (исходя из соотношений $eu_1 = eu_2 = 0$). Покажем, что в $\mathcal{A}^{m-4}$ есть только два монома, содержащих u_1, u_2. Действительно, вспоминая (4.16), запишем:

$$z_1^{i'} \hat{e}_1^{s'} \hat{e}_2^{t'} u_1^{a'} u_2^{b'}, \tag{4.47}$$

где $i' + 6(s'+t') + 2(a'+b') = m - 4 \equiv 2 \pmod 6$. Пусть $a' = 1$, тогда $b' = 0, t' = 0, j' = 0$ и имеем $i' + 6s + 2 \equiv 2 \pmod 6$, то есть $i' \equiv 0 \pmod 6$, и $i' \in \{0,1\}$, откуда $i' = 0$. Из соотношения $6s' + 2 = m - 4$ приходим к $s' = \frac{m-6}{6}$. Аналогично для $b = 1$ приходим к $i' = 0$, и $t' = \frac{m-6}{6}$.

Значит, $\mathcal{A}^{m-4}$ содержит два монома с u_1, u_2, а именно:

$$\hat{e}^{s'} u_1, \hat{e}^{t'} u_2. \tag{4.48}$$

Пусть теперь $\varepsilon = 0$. Тогда имеем следующие случаи:

(a) $i = 1$. Тогда, если $j = 1$, то и $a = b = 0$, и в этом случае $2 + 6(s+t) = m \equiv 0 \pmod 6$, что невозможно. Если $j = 0$, то $1 + 6(s+t) + 2(a+b) = m \equiv 0 \pmod 6$, и подставляя возможные значения $a, b \in \{0,1\}$ с учетом $ab = 0$, снова приходим к противоречию.

(b) $i = 0$. Тогда $j + 6(s+t) + 2(a+b) = m \equiv 0 \pmod 6$, и подставляя возможные значения для j, a, b, приходим к выводу, что $j = a = b = 0$.

Таким образом, есть два монома с $\varepsilon = 0$, а именно:

$$\hat{e}_1^s, \hat{e}_2^t. \tag{4.49}$$

Тем самым, $\dim_K \mathcal{A}^m = (\dim_K \mathcal{A}^{m-4} - 2) + 2 = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$.

2. $m \equiv 1 \pmod 6$. Снова мономы с $\varepsilon > 0$ находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$ без u_1, u_2. Запишем

$$z_1^{i'} \hat{e}_1^{s'} \hat{e}_2^{t'} u_1^{a'} u_2^{b'}, \tag{4.50}$$

где $i' + 6(s' + t') + 2(a' + b') = m - 4 \equiv 3 \pmod 6$. Если $a' = 1$, то получаем, аналогично случаю 1, $i' + 6s' + 2 \equiv 3 \pmod 6$, то есть $i' = 1, s' = \frac{m-7}{6}$ Если $b' = 1$, то $i' = 1, t' = \frac{m-7}{6}$. Значит, в $\mathcal{A}^{m-4}$ два монома с u_1, u_2 :

$$z_1 \hat{e}_1^{s'} u_1, z_1 \hat{e}_2^{t'} u_2. \tag{4.51}$$

Пусть $\varepsilon = 0$. Тогда

(a) $i = 1$. Если $j = 1$, то и $a = b = 0$, и в этом случае $2+6(s+t) = m \equiv 1 \pmod 6$, что невозможно. Если $j = 0$, то $1 + 6(s + t) + 2(a + b) = m \equiv 1 \pmod 6$, и подставляя возможные значения $a, b \in \{0, 1\}$ с учетом $ab = 0$, получаем, что $a = b = 0$.

(b) $i = 0$. Тогда $j + 6(s + t) + 2(a + b) = m \equiv 1 \pmod 6$, и получаем, что $j = 1$, $a = b = 0$.

Таким образом, есть четыре монома с $\varepsilon = 0$, конкретно

$$z_1 \hat{e}_1^{s}, z_1 \hat{e}_2^{t}, \tag{4.52}$$

$$w \hat{e}_1^{s}, w \hat{e}_2^{t}. \tag{4.53}$$

Поэтому $\dim_K \mathcal{A}^m = (\dim_K \mathcal{A}^{m-4} - 2) + 4 = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 2$.

3. $m \equiv 2 \pmod 6$. Пусть $\varepsilon > 0$. Снова перечислим мономы из $\mathcal{A}^{m-4}$, в которых есть u_1, u_2. Для

$$z_1^{i'} \hat{e}_1^{s'} \hat{e}_2^{t'} u_1^{a'} u_2^{b'}, \tag{4.54}$$

должно выполняться $i' + 6(s' + t') + 2(a' + b') = m - 4 \equiv 4 \pmod 6$, что невозможно.

Теперь пусть $\varepsilon = 0$. Тогда $i + j + 6(s + t) + 2(a + b) = m \equiv 2 \pmod 6$. Возможные конфигурации в этом случае $i = j = 1, a = b = 0$, $i = j = 0$, $a = 1$, $i = j = 0$, $b = 1$, и тогда такие мономы, с учетом соотношений алгебры $\mathcal{A}$, суть

$$z_1 w \hat{e}_1^{s}, z_1 w \hat{e}_2^{t}, \tag{4.55}$$

$$\hat{e}_1^{s} u_1, \hat{e}_2^{t} u_2. \tag{4.56}$$

Таким образом, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 4$.

4. $m \equiv 3 \pmod 6$. Как и прежде, перечислим мономы из $\mathcal{A}^{m-4}$, в которых есть u_1, u_2. Соотношение на показатели степени в (4.16) тогда $i'+6(s'+t')+2(a'+b') = m-4 \equiv 5 \pmod 6$, что невозможно ни при каких i', a', b'. Поэтому мономы (4.8) степени m с $\varepsilon > 0$ находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$.

   Если же $\varepsilon = 0$, то в (4.8) $i+j+6(s+t)+2(a+b) = m \equiv 3 \pmod 6$, таким образом, $i = 1, a = 1$, $i = 1, b = 1$ – единственные возможные конфигурации (если $j = 1$, то необходимо $a = b = 0$). Тогда мономы с $\varepsilon = 0$ оказываются одним из:

   $$z_1\hat{e}_1^s u_1, z_1\hat{e}_2^t u_2. \tag{4.57}$$

   Заключаем, что $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 2$.

5. $m \equiv 4 \pmod 6$. Перечислим мономы из $\mathcal{A}^{m-4}$, в которых есть u_1, u_2. Соотношение на показатели степени в (4.16) тогда $i'+6(s'+t')+2(a'+b') = m-4 \equiv 0 \pmod 6$, что возможно при $i' = a' = b' = 0$. Но в этом случае в $\mathcal{A}^{m-4}$ нет мономов, содержащих u_1 или u_2.

   Теперь поймем, что мономов из $\mathcal{A}^m$ с $\varepsilon = 0$ нет. В (4.8) $i+j+6(s+t)+2(a+b) = m \equiv 4 \pmod 6$, и это не выполняется ни при каких i, j, a, b (с учетом соотношений $ab = aj = bj = 0$).

   Тогда $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$.

6. $m \equiv 5 \pmod 6$. Тогда соотношение на показатели степени в (4.16) $i' + 6(s'+t') + 2(a'+b') = m-4 \equiv 1 \pmod 6$, что возможно лишь при $i' = 1, a = 0, b = 0$. Снова понимаем, что в $\mathcal{A}^{m-4}$ нет мономов, содержащих u_1, u_2.

   Для мономов из $\mathcal{A}^m$ с $\varepsilon = 0$ должно выполняться (при $m \geq 6$) $i + j + 6(s+t) + 2(a+b) = m \equiv 5 \pmod 6$, что невозможно. Для $m = 5$ также легко увидеть, что мономов с $\varepsilon = 0$ не существует.

   Отсюда, наконец, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$, что и завершает доказательство леммы.

Доказательство предложения 5 теперь следует из равенств (4.41)- (4.45) и леммы 3.

$\square$

4.2 Случай $p|n_1$

Расмотрим алгебру $\mathcal{A}_1 := K\langle \mathcal{X}_1 \rangle / I_1$, определенную в разделе 2.

Аналогично предыдущему пункту, достаточно показать, что

Предложение 6. *Пусть* $p|n_1$. *Тогда*

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.58}$$

Введем на $\mathcal{A}$ порядок так, что

$$\begin{gathered}c_{12} < c_{23} < c_{31} < z_1 < w_{23} < x_1 < x_3 < \widehat{x}_1 < \widehat{x}_2 < e < \hat{e}_1 < \hat{e}_2 < \\ < x_{12} < x_{23} < x_{31} < u_1 < u_2 < \widehat{u}_1 < \widehat{u}_2 < \zeta.\end{gathered} \tag{4.59}$$

Произвольный моном из $\mathcal{A}^m$ представляется с точностью до константы из K как

$$c_{12}^{k_1} c_{23}^{k_2} c_{31}^{k_3} z_1^i w_{23}^j x_1^k x_3^l \widehat{x}_1^{\hat{k}} \widehat{x}_2^{\hat{l}} e^{\varepsilon} \hat{e}_1^s \hat{e}_2^t x_{12}^{\alpha} x_{23}^{\beta} x_{31}^{\gamma} u_1^a u_2^b \widehat{u}_1^{\hat{a}} \widehat{u}_2^{\hat{b}} \zeta^z. \tag{4.60}$$

Введем следующие элементарные шаги редукции:

$$x_1 x_{12} \Rightarrow c_{12} \widehat{x}_1, \tag{4.61}$$
$$x_3 x_{31} \Rightarrow c_{31} \widehat{x}_3, \tag{4.62}$$
$$w_{23} x_{23} \Rightarrow c_{23} \widehat{w}_{23}, \tag{4.63}$$
$$c_{12} x_1 e \Rightarrow x_{12} \widehat{x}_1, \tag{4.64}$$
$$c_{31} x_3 e \Rightarrow x_{31} \widehat{x}_3, \tag{4.65}$$
$$w_{23} \widehat{u}_1 \Rightarrow z_1 \widehat{u}_1, \tag{4.66}$$
$$w_{23} \widehat{u}_2 \Rightarrow z_1 \widehat{u}_2, \tag{4.67}$$
$$x_{12}^2 \Rightarrow c_{12} e, \tag{4.68}$$
$$x_{23}^2 \Rightarrow c_{23} e, \tag{4.69}$$
$$x_{31}^2 \Rightarrow c_{31} e. \tag{4.70}$$

Видно, что в нормальной форме ненулевого монома все показатели, кроме ε, s и t, а также k_1,, k_2, k_3 не превосходят 1. Кроме того, аналогично случаю 4.1, единственными мономами, содержащими u_1 или u_2, являются

$$z_1^i \hat{e}_1^s \hat{e}_2^t u_1^a u_2^b. \tag{4.71}$$

Перечислим теперь мономы степени не более 4.

1. степени 0:

$$1, \tag{4.72}$$
$$c_{12}^{k_1}, k_1 = \overline{1, n_3}, \tag{4.73}$$
$$c_{23}^{k_2}, k_2 = \overline{1, n_1}, \tag{4.74}$$
$$c_{31}^{k_3}, k_3 = \overline{1, n_2}. \tag{4.75}$$

2. степени 1:

$$z_1, \tag{4.76}$$
$$c_{12}^{k_1}x_1, k_1 = \overline{0, n_3 - 2}, \tag{4.77}$$
$$c_{23}^{k_2}w_{23}, k_2 = \overline{0, n_1 - 1}, \tag{4.78}$$
$$c_{31}^{k_3}x_2, k_3 = \overline{0, n_2 - 2}. \tag{4.79}$$

3. степени 2:

$$\zeta, \tag{4.80}$$
$$c_{12}^{k_1}x_{12}, k_1 = \overline{0, n_3 - 2}, \tag{4.81}$$
$$c_{23}^{k_2}x_{23}, k_2 = \overline{0, n_1 - 2}, \tag{4.82}$$
$$c_{31}^{k_3}x_{31}, k_3 = \overline{0, n_2 - 2}, \tag{4.83}$$
$$u_1, \tag{4.84}$$
$$u_2. \tag{4.85}$$

4. степени 3:

$$c_{12}^{k_1}\widehat{x}_1, k_1 = \overline{0, n_3 - 2}, \tag{4.86}$$
$$c_{23}^{k_2}w_{23}x_{23}, k_2 = \overline{0, n_1 - 2}, \tag{4.87}$$
$$c_{31}^{k_3}\widehat{x}_3, k_3 = \overline{0, n_2 - 2}, \tag{4.88}$$
$$\widehat{t}_{23}, \tag{4.89}$$
$$z_1u_1, \tag{4.90}$$
$$z_1u_2. \tag{4.91}$$

5. степени 4:

$$e, \tag{4.92}$$
$$c_{12}^{k_1}e, k_1 = \overline{1, n_3 - 1}, \tag{4.93}$$
$$c_{23}^{k_2}e, k_2 = \overline{1, n_1}, \tag{4.94}$$
$$c_{31}^{k_3}e, k_3 = \overline{1, n_2 - 1}. \tag{4.95}$$

Видно, что

$$\dim_K \mathcal{A}^0 = N+1 \qquad\qquad = \dim_K \mathrm{HH}^0(R), \tag{4.96}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^1 = N-1 \qquad\qquad = \dim_K \mathrm{HH}^1(R), \tag{4.97}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^2 = N \qquad\qquad = \dim_K \mathrm{HH}^2(R), \tag{4.98}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^3 = N \qquad\qquad = \dim_K \mathrm{HH}^3(R), \tag{4.99}$$

$$\dim_K \mathcal{A}^4 = N-1 \qquad\qquad = \dim_K \mathrm{HH}^4(R). \tag{4.100}$$

Рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 3, доказывается, что

$$\dim_K \mathcal{A}^n - \dim_K \mathcal{A}^{n-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 0,4,5 \pmod 6, \\ 2, & \text{если } n \equiv 1,3 \pmod 6, \\ 4, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6, \end{cases} \tag{4.101}$$

откуда и следует утверждение предложения 6.

Доказательство теоремы 1. a. Действительно, поскольку есть сюръективный гомоморфизм $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{HH}^*(R)$ и размерности соответствующих однородных компонент совпадают (предложение 5), то $\mathcal{A} \simeq \mathrm{HH}^*(R)$.

b. Аналогично, существует сюръекция $\mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathrm{HH}^*(R)$ и размерности однородных компонент совпадают (предложение 6), поэтому $\mathcal{A}_1 \simeq \mathrm{HH}^*(R)$.

□

5 Заключение

В представленной работе была вычислена алгебра когомологий Хохшильда алгебры R_{n_1,n_2,n_3} диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ в случае, когда характеристка основного поля нечетна, и кроме того, либо не делит ни одно, либо делит ровно одно из значений n_1, n_2, n_3. Случаи, когда характеристика поля делит ровно два значения или делит все значения n_1, n_2, n_3, представляют не меньший интерес, и будут исследованы в последующих работах.

Список литературы

[1] Генералов А. И., Зильберборд И. М., Романова Д. Б. Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа. V. Серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике, отличной от 2. // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2014. — Т. 430. — С. 74–102.

[2] Erdmann K. Blocks of tame representation type and related algebras // Lect. Notes in Math. — 1990. — Vol. 1428.

[3] Генералов А. И. Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа, I: Серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике 2. // Алгебра и анализ. — 2004. — Т. 16, № 6. — С. 53–122.